

# La sphère الفلكة

## I- الفلكة المعرفة بمركزها وشعاعها.

### تعريف :

لتكن  $A$  نقطة من الفضاء  $\xi$  و  $R$  عدد حقيقي.  
 الفلكة التي مركزها  $A$  وشعاعها  $R$  هي مجموعة النقط  $M$  حيث :  $AM = R$   
 ونرمز لها بـ :  $S(A, R)$   
 $S(A, R) = \{M \in \xi / AM = R\}$

### معادلة فلكة :

#### (1) معادلة فلكة معرفة بمركزها وشعاعها :

الفضاء  $\xi$  منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

لتكن :  $S(\Omega, R)$  فلكة مركزها  $\Omega(x_0, y_0, z_0)$  وشعاعها  $R$  حيث  $R > 0$ .

لدينا :  $M(x, y, z) \in S(\Omega, R) \Leftrightarrow \Omega M = R$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = R$$

$$\Leftrightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$

وهذه المعادلة هي معادلة ديكارتية للفلكة  $S(\Omega, R)$

### أمثلة :

$$R=2, \quad \Omega(3,0,1) \quad (1)$$

$$S_1 : (x-3)^2 + (y)^2 + (z-1)^2 = 4$$

$$R=1, \quad \Omega(1,2,-3) \quad (2)$$

$$S_2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 1$$

$$(x+\sqrt{2})^2 + (y-1)^2 + \left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = 2 \quad (3)$$

$S_1$  هي فلكة مركزها  $\Omega\left(-\sqrt{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$  وشعاعها  $R = \sqrt{2}$ .

$$R=1 \quad \text{و} \quad \Omega(0,0,0) \quad (4)$$

$$S_4 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

#### (2) معادلة فلكة معرفة بأحد أقطارها.

لتكن  $A$  و  $B$  نقطتين مختلفتين من الفضاء  $\xi$ .

توجد فلكة وحيدة  $S$  أحد أقطارها  $[AB]$ .

لتكن  $S$  فلكة أحد أقطارها هو  $[AB]$ .

$$M \in S \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$$

لتكن :  $A(x_A, y_A, z_A)$  و  $B(x_B, y_B, z_B)$

و :  $M(x, y, z)$

و  $S$  فلكة أحد أقطارها هو  $[AB]$ .

لدينا :  $M \in S \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$

$$\Leftrightarrow (x-x_A)(x-x_B) + (y-y_A)(y-y_B) + (z-z_A)(z-z_B) = 0$$

وهذه المعادلة هي معادلة ديكارتية للفلكة  $S$  التي أحد أقطارها هو  $[AB]$ .

### ملاحظة :

إذا كان  $[AB]$  قطر للفلكة  $S$  فإن منتصف  $[AB]$  هو مركزها وشعاعها هو :  $\frac{AB}{2}$ .

(3) دراسة المعادلة :  $(E): x + y + z - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

لدينا :  $(E) \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d$

الحالة ① :  $a^2 + b^2 + c^2 - d < 0$

$$S = \emptyset$$

الحالة ② :  $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$

$$S = \{\Omega(a, b, c)\}$$

الحالة ③ :  $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

نضع :  $R > 0$  حيث  $R^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$$

$$S = S(\Omega(a, b, c), R)$$

### مثال :

(E):  $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + z - 3 = 0$

### ط1 :

لدينا :

$$a = 0$$

$$b = 1$$

$$c = -\frac{1}{2}$$

$$d = -3$$

إذن :  $a^2 + b^2 + c^2 - d = 1 + \frac{1}{4} + 3 = \frac{17}{4} > 0$

إذن :  $S$  فلكة مركزها :  $\Omega\left(0, 1, -\frac{1}{2}\right)$  وشعاعها  $R = \frac{\sqrt{17}}{2}$ .

### ط2 :

لدينا :

(E):  $x^2 + (y-1)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} + 3$

$$x^2 + (y-1)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{17}{4} \Leftrightarrow$$

$$S = S\left(\Omega\left(0, 1, -\frac{1}{2}\right), \frac{\sqrt{17}}{2}\right)$$

## II- تقاطع فلكة ومستوى : الوضع النسبي لمستوى وفلكة :

ليكن  $P$  مستوى و  $S$  فلكة مركزها  $\Omega$  وشعاعها  $R$ .  
لدراسة الوضع النسبي للمستوى  $P$  والفلكة  $S$ ،  
نحسب المسافة  $d$  بين  $(P)$  و  $\Omega$ .  
 $d = d(\Omega, (P))$

الحالة ① :  $d(\Omega, (P)) > R$

$$S \cap P = \emptyset$$

الحالة ② :  $d(\Omega, (P)) = R$

$$(S) \cap (P) = \{H\}$$

بحيث  $H$  هي المسقط العمودي للنقطة  $\Omega$  على  $(P)$ .  
في هذه الحالة نقول ان المستوى  $(P)$  مماس للفلكة  $(S)$ .

الحالة ③ :  $d(\Omega, (P)) < R$

في هذه الحالة تقاطع  $(S)$  و  $(P)$  هو دائرة  $\ell$  مركزها  $H$ .

(حيث  $H$  هو المسقط العمودي للنقطة  $\Omega$  على  $(P)$ ). وشعاعها  $r$  حيث :

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

علما أن :  $d = d(\Omega, (P)) = \Omega H$

مثال :

$$(P) : 2x - y + z + 1 = 0$$

$$S \{ \Omega, 2 \} \quad \text{و :}$$

$$\Omega(1, -1, 1) \quad \text{حيث :}$$

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|2+1+1+1|}{\sqrt{4+1+1}} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6} > 2$$

$$S \cap P = \emptyset \quad \text{إذن :}$$

معادلة المستوى المماس للفلكة في نقطة معينة.

لتكن  $A$  نقطة من الفلكة  $S$  ذات المركز  $\Omega$  والشعاع  $R$ .  
وليكن  $(P)$  المستوى المماس للفلكة  $S$  في  $A$ .

$$M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \quad \text{لدينا :}$$

ملاحظة :

$$\overrightarrow{\Omega A} \text{ منظمة على } (P).$$

مثال :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2 = 0 \quad \text{(S) فلكة معادلتها :}$$

$$A(1, 1, 0) \quad \text{و :}$$

حدد معادلة المستوى المماس للفلكة  $S$  في  $A$ .

$$A \in S \quad \text{لدينا :}$$

$$M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \quad \text{إذن :}$$

$$\Omega(1, -1, 0) \quad \text{وبمأن :}$$

$$A(1, 1, 0)$$

$$M(x, y, z)$$

$$\overline{A\Omega}(0, -2, 0) \quad \text{فإن :}$$

$$\overline{AM}(x-1, y-1, z)$$

$$-2(y-1)=0 \quad \text{إذن :}$$

ومنه :  $y=1$  هي معادلة المستوى المماس للكرة  $S$  في النقطة  $A$ .

### -III- تقاطع كرة ومستقيم :

#### مثال 1 :

أدرس تقاطع الكرة  $S$  والمستقيم  $(D)$ .

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 2y - 4z - 5 = 0 \quad \text{حيث :}$$

$$(D): \begin{cases} x = t \\ y = t + 1 \\ z = 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{و :}$$

لدراسة تقاطع الكرة  $(S)$  والمستقيم  $(D)$ ،

$$\begin{cases} x = t \\ y = t + 1 \\ z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 2y - 4z - 5 = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{نحل النظام :}$$

#### الجواب :

$$t^2 + (t+1)^2 + 4 - 3t + 2(t+1) - 8 - 5 = 0$$

$$2t^2 + t - 6 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(2) \times (-6)$$

$$= 49 > 0$$

$$t_1 = \frac{-1-7}{4} = -2$$

$$t_2 = \frac{-1+7}{4} = \frac{3}{2}$$

ومنه تقاطع الكرة  $S$  والمستقيم  $(D)$  هي النقطتين :  $A(-2, -1, 2)$

$$\text{و : } B\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 2\right)$$

#### مثال 2 :

أدرس الوضع النسبي للمستقيم  $(D)$  والكرة  $(S)$ .

$$(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = -4 \quad \text{حيث :}$$

$$(D): \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

#### الجواب :

$$(1+t-1)^2 + (-1+2t+1)^2 + t^2 = -4$$

$$t^2 + 4t^2 + t^2 = -4$$

$$6t^2 = -4$$

$$6t^2 + 4 = 0$$

$$\Delta = -96 < 0$$

$$(S) \cap (D) = \emptyset$$

ومنه :